

УДК 004.942:504.3.054

# Математические модели и алгоритмы оценки степени загрязнения воздуха в городах

Рассмотрены вопросы разработки математического обеспечения системы поддержки принятия решений при выборе оптимального маршрута передвижения людей в городах с учетом загрязнения атмосферного воздуха. Предложены математические модели и алгоритмы решения задач определения количества примесей в атмосферном воздухе для каждого перекрестка и определения перекрестков для взятия проб атмосферного воздуха.

**А.А. КАРПУК,**

доцент кафедры программного обеспечения сетей телекоммуникаций, к. т. н., доцент

**О.П. РЯБЧИНА,**

старший преподаватель кафедры программного обеспечения сетей телекоммуникаций, магистр техники и технологии

Белорусская государственная академия связи

**Ключевые слова:** загрязнение воздуха, интерполяционный кригинг, метод кросс-валидации, граф перекрестков города.

**Введение.** В работах [1–4] обоснованы важность и актуальность создания системы поддержки принятия решений при выборе оптимального маршрута передвижения людей в городах с учетом загрязнения атмосферного воздуха. Эта система может предоставлять гражданам через сеть интернет в режиме реального времени информацию о текущем состоянии атмосферного воздуха в заданной точке города и о текущем состоянии атмосферного воздуха на планируемом маршруте передвижения. Система может выдавать рекомендации по изменению маршрута с целью минимизации времени нахождения в местах с повышенным содержанием загрязняющих примесей в атмосферном воздухе. Были рассмотрены вопросы разработки технического обеспечения [1, 2], информационного обеспечения [3] и программного обеспечения [4] создаваемой системы принятия решений.

В настоящей статье мы начинаем рассматривать вопросы разработки математического обеспечения создаваемой системы. В системе требуется оценивать степень загрязнения воздуха на любом маршруте движения. Постоянные пункты наблюдения за состоянием воздуха устанавливаются на городских улицах в районах с интенсивным движением транспорта и располагаются в местах, где часто производится торможение автомобилей и выбрасывается

наибольшее количество вредных примесей. В первую очередь, к таким точкам следует отнести перекрестки улиц. Поэтому первой математической задачей системы принятия решений является задача определения количества примесей в атмосферном воздухе для каждого перекрестка. К примеру, в Минске количество перекрестков измеряется тысячами, из них примерно 800 перекрестков имеют светофорное регулирование.

Вычисление степени загрязнения воздуха в произвольной точке города может осложняться тем, что в окрестности этой точки требуемого радиуса может не оказаться пунктов наблюдения за состоянием воздуха либо количество таких пунктов будет недостаточным для достижения требуемой точности расчетов. В этом случае требуется дополнить множество пунктов наблюдения за состоянием воздуха дополнительными пунктами и взять в них пробы атмосферного воздуха с помощью беспилотного летательного аппарата (БЛА) или передвижной лаборатории. Второй математической задачей является задача определения перекрестков, которые будут выступать дополнительными пунктами взятия проб атмосферного воздуха.

**Определение количества примесей в атмосферном воздухе для каждого перекрестка.** В базе данных системы хранятся результаты анализа

атмосферного воздуха, взятые в небольшом количестве стационарных и подвижных пунктов наблюдения за состоянием атмосферного воздуха. При возникновении аварийного выброса загрязняющих веществ в базу данных в качестве пунктов наблюдения должны добавляться источники выбросов. К примеру, в Минске работают 12 стационарных пунктов наблюдения. Для определения количества примесей в атмосферном воздухе на каждом перекрестке следует использовать математические методы интерполяции.

Если в множестве  $N$  точек города  $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  известно численное значение степени загрязнения воздуха некоторой примесью  $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)$ , то в произвольной точке города  $x$  значение степени загрязнения воздуха этой примесью  $u(x)$  можно вычислить поинтерполяционной формуле кригинга [5]

$$u(x) = \sum_{i=1, n | x_i \in N(x)} \omega_i(x) u(x_i),$$

где  $N(x) \subseteq N$  – множество точек города, участвующих в вычислении степени загрязнения воздуха в точке  $x$ ;

$\omega_i(x)$  – весовой коэффициент вклада точки  $x_i$  в вычисление степени загрязнения воздуха в точке  $x$ .

Множества  $N(x)$  и функции  $\omega_i(x)$  выбираются таким образом, чтобы выполнялись условие несмещенности оценки: для любого  $i = 1, n$  математическое ожидание разности между известной величиной  $u(x_i)$  и значением этой величины, вычисленным по формуле кригинга, должно равняться 0, т. е.

$$M(u(x_i) - u^*(x_i)) = 0, \text{ где}$$

$$u^*(x_i) = \sum_{j=1, n | x_j \in N(x_i), j \neq i} \omega_j(x) u(x_j).$$

Условие несмещенности оценки выполняется, если для любой точки  $x$  сумма весовых коэффициентов, используемых при интерполяционном кригинге, равна 1, т. е.

$$\sum_{i=1, n | x_i \in N(x)} \omega_i(x) = 1.$$

В настоящее время широкое распространение получили кригинговые интерполяторы с весовыми коэффициентами, обратно пропорциональными квадрату расстояния до оцениваемой точки:

$$\omega_i(x) = \frac{1}{d_i^2} / \sum_{j=1, n | x_j \in N(x)} \frac{1}{d_j^2}, \tag{1}$$

где  $d_i$  – расстояние между точками  $x_i$  и  $x$ .

Знаменатель в последней формуле служит для обеспечения выполнения условия несмещенности оценки. Работа описанного кригингового интерполятора существенно зависит от метода выбора множества точек  $N(x)$ . Может выбираться фиксированное количество точек, ближайших к точке  $x$ . При другом подходе могут выбираться все точки, находящиеся от точки  $x$  на расстоянии, не превосходящем заданную величину  $r$ .

Для оценки качества выбора весовых коэффициентов и множества точек  $N(x)$  применим метод кросс-валидации [1]. Для каждой точки  $x_i, i = 1, n$ , вычислим невязку  $\Delta u(x_i) = u(x_i) - u^*(x_i)$ . Полученные невязки можно графически представить в виде карты невязок, по которой можно определить, в каких зонах данный кригинговый интерполятор работает неудовлетворительно. Вместо невязок можно визуализировать относительные ошибки  $e(x_i) = \Delta u(x_i) / u(x_i)$ . Среднеквадратичная ошибка интерполяции  $E$  выражается в виде

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [u(x_i) - u^*(x_i)]^2}. \tag{2}$$

В дальнейшем будем считать, что для интерполяции используются весовые коэффициенты в виде (1). Если для построения множества точек  $N(x)$  выбирать фиксированное количество точек  $m$ , ближайших к точке  $x$ , то значение  $m$  для каждого типа примеси можно определить по следующему алгоритму. Для всех возможных значений  $m$  от 2 до  $n$  вычислим среднеквадратичную ошибку интерполяции по формуле (2), и в качестве  $m$  выберем значение, при котором величина  $E$  достигает минимума.

Если для построения множества точек  $N(x)$  выбирать точки, находящиеся от точки  $x$  на расстоянии, не превосходящем заданную величину  $r$ , то значение  $r$  для каждого типа примеси можно определить по следующему алгоритму. Для каждой точки  $x_i, i = 1, n$ , найдем  $r_i^{\min}$  – расстояние от точки  $x_i$  ко второй ближайшей точке из  $N$ , и  $r_i^{\max}$  – расстояние от точки  $x_i$  к самой удаленной точке из  $N$ . Обозначим

$$r^{\min} = \max_i r_i^{\min}, r^{\max} = \max_i r_i^{\max}.$$

Для всех возможных значений  $r$  от  $r^{\min}$  до  $r^{\max}$  с некоторым шагом (например, 100 м) вычислим

среднеквадратичную ошибку интерполяции по формуле (2) и в качестве  $r$  выберем значение, при котором величина  $E$  достигает минимума.

**Определение перекрестков, которые будут выступать дополнительными пунктами взятия проб атмосферного воздуха.** Вычисление степени загрязнения воздуха в произвольной точке города  $X$  может осложняться тем, что в окрестности этой точки радиуса  $r$  может не оказаться точек из множества  $N$  либо количество таких точек будет недостаточным для достижения требуемой точности интерполяции. В этом случае требуется дополнить множество точек  $N$  дополнительными точками и взять в них пробы атмосферного воздуха с помощью БЛА или передвижной лаборатории. Построим математическую модель задачи определения перекрестков, которые будут выступать дополнительными пунктами взятия проб атмосферного воздуха.

Территорию города можно представить в виде многоугольника  $M$  в евклидовом пространстве  $R^2$ . Каждая из  $n$  точек множества  $N$  имеет координаты  $(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Будем рассматривать каждую точку из множества  $N$  как центр круга радиуса  $r$ . Если для произвольной точки  $(x, y) \in M$  существует не менее  $m$  точек  $(x_i, y_i) \in N$ , таких, что точка  $(x, y)$  лежит внутри круга радиуса  $r$  с центром в точке  $(x_i, y_i)$ , то количество точек в множестве  $N$  достаточно для достижения требуемой точности интерполяции, и дополнительное взятие проб воздуха не требуется. В этом случае построенное множество кругов радиуса  $r$  полностью покрывает многоугольник  $M$  требуемое количество раз. Если это условие не выполняется, то задача нахождения минимального количества дополнительных пунктов взятия проб воздуха сводится к задаче нахождения центров минимального количества кругов радиуса  $r$ , которые вместе с кругами с центрами из множества  $N$  полностью покрывают многоугольник  $M$  таким образом, что каждая точка многоугольника лежит не менее, чем в  $m$  кругах.

Задача поиска оптимального покрытия многоугольника на плоскости кругами заданного радиуса неоднократно рассматривалась в литературе в различных постановках. В нашем случае допускается пересечение кругов, в качестве ограничения выступает требование покрытия всего многоугольника  $m$  раз, а целевой функцией является минимизация количества кругов. В книге [6] показано, что если требуется покрыть многоугольник кругами один раз ( $m = 1$ ), то оптимальное решение достигается, когда центры кругов лежат в узлах решетки, составленной из равносторонних треугольников со стороной, равной  $r\sqrt{3}$ . Алгоритм покрытия многоугольника один раз состоит в выделении непокрытых

областей, определении центра первого круга радиуса  $r$  на границе непокрытой области и размещении остальных кругов таким образом, чтобы расстояние между центрами любой пары кругов равнялось  $r\sqrt{3}$ . Работа алгоритма повторяется  $m$  раз. Однако при таком алгоритме центры кругов не обязательно будут располагаться на перекрестках. Для обеспечения выполнения этого условия следует при выборе центра очередного круга выбирать ближайший перекресток к рассчитанному центру, уменьшая при этом радиус круга. Построенная математическая модель задачи нахождения пунктов, в которых надо взять дополнительные пробы воздуха, является непрерывной, поэтому алгоритм ее решения пришлось модифицировать для размещения центров кругов на перекрестках.

Построим дискретную математическую модель задачи нахождения перекрестков, в которых надо взять дополнительные пробы воздуха. Рассмотрим полный неориентированный граф  $G(P, D)$ , множество вершин которого  $P = \{P_i, i = \overline{1, p}\}$  состоит из множества точек города  $N$  и множества всех перекрестков города, не входящих в множество  $N$ . Будем считать, что первые  $n$  вершин графа – это точки из  $N$ , а следующие  $(p - n)$  вершин – это перекрестки города. Каждому ребру графа, соединяющему вершины  $P_i$ ,  $i \in \overline{1, p}$ , и  $P_j$ ,  $j \in \overline{1, p}$ , поставим в соответствие величину  $d_{ij}$  – расстояние между соответствующими точками города по прямой линии. С каждой вершиной графа свяжем переменную  $z_i \in \{0, 1\}$ ,  $i = \overline{1, p}$ , значение которой равно 1, если в соответствующей точке города берутся пробы воздуха, и равно 0 в противном случае. Из определения графа  $G$  следует, что  $z_i = 1$  для всех  $i = \overline{1, n}$ .

Введем  $p \times p$  – матрицу  $D'$ , элементы которой  $d'_{ij}$ ,  $i \in \overline{1, p}$ ,  $j \in \overline{1, p}$  определим по правилу: если  $0 < d_{ij} \leq r$  или  $z_i = 1$ , то  $d'_{ij} = 1$ , иначе  $d'_{ij} = 0$ . Задача нахождения перекрестков, в которых надо взять дополнительные пробы воздуха, формулируется следующим образом. Найти значения переменных  $z_i$  для  $i = \overline{n+1, p}$ , при которых достигается минимума сумма

$$\sum_{i=1}^p z_i \rightarrow \min ,$$

и выполняются ограничения

$$m_i = \sum_{j=1}^p d'_{ij} z_j \geq m \text{ для всех } i = \overline{1, p} .$$



Для решения задачи разработан эвристический алгоритм, построенный на принципах «жадных» алгоритмов решения задач дискретной оптимизации.

**Заключение.** Таким образом, в состав математического обеспечения системы поддержки принятия решений при выборе оптимального маршрута передвижения людей в городах с учетом загрязнения атмосферного воздуха должны входить математические модели и методы решения следующих задач:

- задача определения количества примесей в атмосферном воздухе для каждого перекрестка города. Для решения задачи следует использовать интерполяционные формулы кригинга;
- задача определения перекрестков, которые будут выступать дополнительными пунктами взятия проб атмосферного воздуха. Для решения задачи следует использовать алгоритм покрытия многоугольника кругами заданного радиуса или эвристический алгоритм.

*Продолжение читайте в № 6/2020.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Рябычина, О.П.** Методы и средства мониторинга загрязнения атмосферного воздуха / О.П. Рябычина, В.А. Рыбак // Проблемы инфокоммуникаций. – 2018. – № 1 (7). – С. 27–37.
2. **Рябычина, О.П.** Аналитический обзор аппаратных средств мониторинга загрязнения атмосферного воздуха / О.П. Рябычина, В.А. Рыбак // Веснік сув'язі – 2018. – № 3 (149). – С. 43–46.
3. **Рябычина, О.П.** Информационная подсистема анализа загрязнения атмосферного воздуха / О.П. Рябычина, В.А. Рыбак // Веснік сув'язі. – 2019. – № 2 (154). – С. 48–52.
4. **Рябычина, О.П.** Поиск оптимального маршрута с учетом загрязнения окружающей среды (воздуха) / О.П. Рябычина // Веснік сув'язі. – 2019. – № 6 (158). – С. 50–53.
5. **Демьянов, В.В.** Геостатистика: теория и практика / В.В. Демьянов, Е.А. Савельева; под ред. Р.В. Арутюняна. – М.: Наука, 2010. – 327 с.
6. **Тот, Л.Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве / Л.Ф. Тот; Пер. с нем. под ред. И.М. Яглома. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит, 1958. – 364 с.

*The issues of the development of the mathematical support of the decision support system when choosing the optimal route for the movement of people in cities, taking into account atmospheric air pollution. Mathematical models and algorithms for solving problems of determining the amount of impurities in the atmospheric air for each intersection are proposed and identification of intersections for taking samples of atmospheric air.*

**Key words:** air pollution, interpolation kriging, cross-validation method, city intersection graph.

*Получено 24.09.2020.*